Enseignant: Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
14 avril 2022
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 3 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne l'application linéaire:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-x - z, y + 2z, 3x + y + 5z).$$

Question 1 *(1 point)* Quelle est l'image de $(-1, -3, 1)$ par l'application linéaire $f \circ f - 4f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$?

☐ $(2, 5, 1)$ ☐ $(1, 3, -5)$ ☐ $(4, -3, 6)$ ■ $(3, 7, -4)$

Question 2 *(2 points)* Parmi les équations suivantes, sélectionner celle qui décrit un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $\mathrm{Ker}(f \circ f)$.

☐ $3x + y + 5z = 0$ ☐ $x + y + 3z = 0$ ■ $2x + y + 4z = 0$ ☐ $x - y + z = 0$

Question 3 *(1 point)* Parmi les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$, sélectionner celui qui possède (au moins) un antécédent par f.

■ $(1, 5, 2)$ ☐ $(2, -1, 4)$ ☐ $(3, 1, 5)$ ☐ $(-1, 2, 6)$

Enoncé

On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non nulle vérifiant:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ et } 2x - 3y + 5z = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\{(x,y,z)\}) = \varnothing.$$

Question 4 *(1 point)* Que vaut le rang de f ?

☐ 2 ☐ 0 ☐ 3 ■ 1

Question 5 *(2 points)* On sait que l'une des matrices suivantes est égale à :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?

☐ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Enoncé

On donne les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = (2,0,1),(0,-1,3),(1,0,1) \qquad \mathcal{B}' = (5,2,-1),(3,1,0),(2,0,0)$$

et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant:

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question 6 *(2 points)* Que vaut le déterminant de f ?

- ☐ 1
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ -2
- ■ 4

Question 7 *(2 points)* Parmi les triplets suivants, sélectionner celui qui est égal à $f(5,2,-1)$.

- ☐ $(1,0,1)$
- ☐ $(8,2,0)$
- ☐ $(7,2,-1)$
- ■ $(1,0,-1)$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

On donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (2, 1, -5), \quad v_2 = (3, 1, 2), \quad v_3 = (1, 0, 3).$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition correspondante de v sur $\mathcal{B}$.

(c) Vérifier la décomposition trouvée au (b) dans le cas particulier où $v = (1, 0, 0)$.

(d) Déterminer un élément v_4 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille:

$$\mathcal{B}' = v_1, v_3, v_4$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la deuxième et la troisième coordonnée de v_2 sont égales.

Solution

(a) Calculons le déterminant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 7 = 4.$$

Comme il est non nul, on peut affirmer que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On trouve les coordonnées de v en inversant un système linéaire:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v = t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + t_3 = x \\ t_1 + t_2 = y \\ -5t_1 + 2t_2 + 3t_3 = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 + t_2 = y \\ t_2 + t_3 = x - 2y \\ 7t_2 + 3t_3 = 5y + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 + t_2 = y \\ t_2 + t_3 = x - 2y \\ 4t_2 = -3x + 11y + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}y - \frac{1}{4}z \\ t_2 = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}y + \frac{1}{4}z \\ t_3 = \frac{7}{4}x - \frac{19}{4}y - \frac{1}{4}z \end{cases}$$

La décomposition de v sur $\mathcal{B}$ s'écrit donc:

$$(x, y, z) = (\tfrac{3}{4}x - \tfrac{7}{4}y - \tfrac{1}{4}z)(2, 1, -5) + (-\tfrac{3}{4}x + \tfrac{11}{4}y + \tfrac{1}{4}z)(3, 1, 2) + (\tfrac{7}{4}x - \tfrac{19}{4}y - \tfrac{1}{4}z)(1, 0, 3).$$

(c) Pour $v = (1, 0, 0)$, la décomposition trouvée au (b) donne :

$$(1, 0, 0) = \tfrac{3}{4}(2, 1, -5) - \tfrac{3}{4}(3, 1, 2) + \tfrac{7}{4}(1, 0, 3).$$

Vérifions qu'elle est vraie :

$$\tfrac{3}{4}(2, 1, -5) - \tfrac{3}{4}(3, 1, 2) + \tfrac{7}{4}(1, 0, 3) = (\tfrac{6}{4}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{15}{4}) + (-\tfrac{9}{4}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{6}{4}) + (\tfrac{7}{4}, 0, \tfrac{21}{4}) = \cdots$$

$$\cdots = (\tfrac{6}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{7}{4}, \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4} + 0, -\tfrac{15}{4} - \tfrac{6}{4} + \tfrac{21}{4}) = (1, 0, 0).$$

(d) Il suffit par exemple de prendre :

$$v_4 = v_2 - v_3 = (2, 1, -1).$$

La famille $\mathcal{B}' = v_1, v_3, v_4$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$, puisque:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Par ailleurs, la décomposition de v_2 dans cette base est:

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot \underbrace{v_4}_{v_2 - v_3}.$$

Par conséquent, les deuxième et troisième coordonnées de v_2 dans dans $\mathcal{B}'$ sont égales (à 1).

Question 9: *Cette question est notée sur 7 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6 .5 7

On donne les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par les formules suivantes:

$f(x,y,z) = (4x+20y+8z, -x-5y-2z, 2x+10y+4z)$ et $g(x,y,z) = (4x+4y+3z, -5x+6y-z, 3x+2y+2z)$.

(a) Quel est le rang de f ? Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

(b) Ecrire la matrice de g en base canonique et en déterminer une décomposition colonne-ligne minimale.

(c) Sans aucune justification, donner une application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 2 vérifiant:

$$f \circ h = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(g+h) = \operatorname{Ker} g.$$

Solution

(a) Ecrivons f sous la forme :

$$f(x,y,z) = (4x+20y+8z, -x-5y-2z, 2x+10y+4z) = (x+5y+2z)(4,-1,2).$$

Au niveau matriciel :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 8 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

De cette manière, on voit que f est de rang 1 et que le noyau de f est le plan vectoriel :

$$\operatorname{Ker} f : x + 5y + 2z = 0.$$

Il a pour base :

$$(5,-1,0),\ (2,0,-1).$$

(b) La matrice de g en base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - 5C_3$ puis $C_2 \leftarrow C_2 + 6C_3$ mènent à la matrice:

$$\begin{pmatrix} -11 & 22 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -7 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

dans laquelle une relation de proportionnalité est apparue (facteur -2 pour passer de la première colonne à la troisième). On en déduit la relation suivante entre les colonnes de B:

$$-2\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou encore:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En partant de la décomposition:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en insérant la relation ci-dessus on obtient alors:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme B possède une décomposition de longueur 2 on sait que son rang est inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, ses colonnes (ou aussi ses lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, donc elle est de rang supérieur ou égal à 2. En conclusion, B est de rang 2 et la décomposition écrite ci-dessus est minimale.

(c) Définissons h par sa matrice C en base canonique :

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

ou encore:

$$h(x, y, z) = (5x - 2y + 2z, -x + 2y, -4y - z).$$

Comme C possède une décomposition colonne-ligne de longueur 2 elle est de rang inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, il est clair qu'elle est de rang strictement supérieur à 1 (ses colonnes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles). Par conséquent, h est bien de rang 2. On a aussi:

$$AC = \underbrace{A \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

si bien que $f \circ h$ est bien l'application nulle. Enfin, observons que :

$$B + C = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de montrer que g et $g + h$ ont le même noyau, à savoir la droite vectorielle d'équations :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4y + z = 0. \end{cases}$$